АКАДЕМИЯ НАУК СССР

АВТОМАТИКА
И
ТЕЛЕМЕХАНИКА

(отдельный оттиск)

МОСКВА · 1989

УДК 519.218

ТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРА

КОЛЕССА А. Е.

(Москва)

Решается задача оценивания параметра, входящего кусочно-линейным образом в нестационарное уравнение наблюдаемого процесса в дискретном времени с гауссовскими некоррелированными ошибками измерений. Находятся замкнутые рекуррентные уравнения для достаточных статистик и формулы для апостериорных характеристик оцениваемого параметра. Изучается предельный вид этих характеристик и уравнений фильтрации при бесконечно больших априорных дисперсиях компонент оцениваемого векторного параметра.

1. Введение

Рассматривается задача определения апостериорной плотности вероятности $p(x|y^t)$ n_x-мерного случайного вектора X при фиксированной реализации $y^t=(y_1,\ldots,y_t)$ n_y-мерной случайной последовательности $Y^t=(Y_1,\ldots,Y_t)$, $t=1,2,\ldots$, статистически связанной с X.

Случайные величины обозначаются в статье прописными буквами, а их реализации, или соответствующие аргументы плотностей вероятности (ПВ),— аналогичными строчными буквами.

Предполагается, что совместная ПВ $p(x,y^t)$ векторов X, Y^t задана априорной ПВ $p(x)$ величины X и функцией правдоподобия $p(y^t|x)$, причем

$$(1)\qquad p(y_t|y^{t-1},x)=p(y_t|x).$$

Известно, что в принятых предположениях АПВ удовлетворяет рекурсивному байесовскому соотношению [1]:

$$(2)\qquad p(x|y^t)=\frac{p(y_t|x)p(x|y^{t-1})}{\int p(y_t|x)p(x|y^{t-1})dx},$$

решаемому с начальным условием

$$(3)\qquad p(x|y^0)=p(x).$$

Найти точное решение в замкнутой форме для рассматриваемой задачи нелинейного оценивания в общем случае не удается. В многочисленных работах (см., например, обзор в [1]) предлагаются способы приближенного решения задачи, базирующиеся на различных вариантах аппроксимации АПВ. Вместе с тем особый интерес представляют ситуации, когда оказывается возможным получить точное решение рекурсивного соотношения (2) в виде системы рекуррентных уравнений для конечного числа параметров, однозначно задающих функцию $p(x|y^t)$ для произвольного $t=1,2,\ldots$ Здесь прежде всего следует упомянуть решение задачи фильтрации в гауссовско-марковском и условно-гауссовском случаях [2]. В работе [3] точное решение рекурсивного байесовского соотношения найдено в предположении, что уравнения динамической системы зависят от каждой компоненты вектора состояния кусочно-постоянным образом.

В работах [4, 5] для кусочно-линейной задачи фильтрации рассмотрен метод точного расчета АПВ, который в общем случае требует алгоритмизации вычисления интегралов от многомерной гауссовской ПВ по многогранной области, а также определения области пересечения выпуклых многогранников.

В данной статье развивается предложенный в [4, 5] метод, основанный на кусочном представлении АПВ. Для задачи оценивания параметра при нестационарном кусочно-линейном уравнении наблюдаемого процесса в дискретном времени при наличии гауссовских некоррелированных ошибок измерения показывается, что кусочно-гауссовская ПВ обладает свойством «воспроизводимости» формы априорного распределения в апостериорном. Находятся замкнутые рекуррентные уравнения для достаточных статистик, а также для оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки параметра и ковариационной матрицы ошибок оценивания.

При условии, что уравнение наблюдаемого процесса от части компонент оцениваемого параметра зависит кусочно-постоянным образом, а от остальных компонент — линейно, находятся наиболее простые уравнения оптимальной фильтрации, не требующие вычисления многомерных интегралов от гауссовской плотности.

Рассматриваются случаи как конечных, так и бесконечно больших априорных дисперсий компонент оцениваемого вектора.

2. Кусочное представление апостериорной плотности вероятности и модификация рекурсивного байесовского соотношения

Рассмотрим разбиение

$$E_{nx}=\Omega_0\cup\Omega_1\cup\ldots\cup\Omega_n \tag{4}$$

n_x-мерного евклидова пространства E_n на совокупность некоторых попарно непересекающихся областей Ω_i, $i=\overline{0,n}$, а также следующие кусочные модели априорной ПВ вектора X и функции правдоподобия:

$$\begin{gathered} p(x)=\sum_{i=0}^{n}U_{0,i}I_{\Omega_i}(x)p^i(x)\Big/\sum_{i=0}^{n}U_{0,i}R_{0,i}, \\ p(y_t|x)=\sum_{i=0}^{n}I_{\Omega_i}(x)p^i(y_t|x), \end{gathered} \tag{5}$$

где $U_{0,i}$, $i=\overline{0,n}$ — некоторые коэффициенты,

$$R_{0,i}=\int\limits_{\Omega_i}p^i(x)\,dx,\qquad I_\Omega(x)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad x\in\Omega,\\ 0 & \text{при}\quad x\notin\Omega,\end{cases}$$

а $p^i(x)$, $p^i(y_t|x)$ — некоторые функции аргументов x, y_t, удовлетворяющие условиям нормировки

$$\int p^i(x)\,dx=1,\qquad \int p^i(y_t|x)\,dy_t=1.$$

Пусть для вспомогательных вектора X_i и последовательности $Y_{1,i}^t = (Y_{1,i}, \ldots, Y_{t,i})$ $(i=\overline{0,n})$ заданы следующие плотности вероятности:

(6) $$p_{X_i}(x) = p^i(x), \quad p_{Y_{t,i}|Y_{1,i}^{t-1}, X}(y_t \mid y^{t-1}, x) = p^i(y_t \mid x).$$

Теорема 1. В предположениях (1), (4)–(6) для $t=1, 2, \ldots$ имеет место тождество

(7) $$p(x \mid y^t) = \sum_{i=0}^{n} U_{t,i} I_{\Omega_i}(x)\, p_{X_i|Y_{1,i}^t}(x \mid y^t) \Big/ \sum_{i=0}^{n} U_{t,i} R_{t,i},$$

где

(8) $$R_{t,i} = \int_{\Omega_i} p_{X_i|Y_{1,i}^t}(x \mid y^t)\, dx,$$

а коэффициенты $U_{t,i}$ для $t \geqslant 2$ $(i=\overline{0,n})$ удовлетворяют рекуррентному уравнению

(9) $$U_{t,i} = U_{t-1,i}\, p_{Y_{t,i}|Y_{1,i}^{t-1}}(y_t \mid y^{t-1}),$$

решаемому с начальным условием

(10) $$U_{1,i} = U_{0,i}\, p_{Y_{1,i}}(y_1).$$

Доказательство теоремы приводится в приложении.

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия.

Случайные векторы Ψ, Φ, Y_t $(t=1, 2, \ldots)$ имеют размеры n_ψ, n_φ, n_y соответственно.

Совокупность попарно непересекающихся n_ψ-мерных областей ω_i, $i=\overline{0,n}$ такова, что $E_{n\psi} = \omega_0 \cup \omega_1 \cup \ldots \cup \omega_n$.

Совместная ПВ $p(\psi, \varphi)$ параметров Ψ, Φ и условная ПВ $p(y_t|y^{t-1}, \psi, \varphi)$ вектора Y_t при фиксированных значениях $Y_1=y_1, \ldots, Y_t=y_t$, $\Psi=\psi$, $\Phi=\varphi$ имеют вид

(11) $$p(\psi, \varphi) = p(\varphi|\psi)\, p(\psi), \qquad p(\varphi|\psi) = \sum_{i=0}^{n} I_{\omega_i}(\psi)\, p^i(\varphi),$$

(12) $$p(y_t|y^{t-1}, \psi, \varphi) = \sum_{i=0}^{n} I_{\omega_i}(\psi)\, p^i(y_t|\varphi),$$

где $p(\psi)$ – априорная ПВ компоненты Ψ, а $p^i(\varphi)$, $p^i(y_t|\varphi)$ – некоторые функции аргументов φ, y_t, удовлетворяющие условиям $\int p^i(\varphi)\, d\varphi = 1$, $\int p^i(y_t|\varphi)\, dy_t = 1$.

Для вспомогательных величин Φ_i, $Y_{1,i}^t$ $(i=\overline{0,n})$ заданы ПВ

(13) $$p_{\Phi_i}(\varphi) = p^i(\varphi), \quad p_{Y_{t,i}|Y_{1,i}^{t-1}, \Phi_i}(y_t \mid y^{t-1}, \varphi) = p^i(y_t \mid \varphi).$$

Тогда условная ПВ $p(\psi, \varphi|y^t)$ компонент Ψ, Φ при условии $Y_1=y_1, \ldots$

$\ldots, Y_t=y_t$ для $t=1, 2, \ldots$ имеет вид

$$p(\psi, \varphi \mid y^t) = \sum_{i=0}^{n} U_{t,i} I_{\omega_i}(\psi)\, p(\psi)\, p_{\Phi_i \mid Y_{1,i}^t}(\varphi \mid y^t) \Big/ \sum_{i=0}^{n} U_{t,i} r_{t,i}, \tag{14}$$

где

$$r_{t,i} = \int_{\omega_i} p(\psi)\, d\psi, \tag{15}$$

а коэффициенты $U_{t,i}$ рассчитываются в соответствии с (9), (10).

Доказательство теоремы приводится в приложении.

Следствие 1. Пусть область ω_ψ, имеющая объем V, является объединением областей ω_i с номерами $i \in I$, где I — некоторое подмножество номеров $i=\overline{0, n}$. В предположении, что компонента Ψ имеет равномерное распределение на ω_ψ, т. е.

$$p(\psi) = I_{\omega_\psi}(\psi)/V, \tag{16}$$

формула (14) для АПВ приобретает вид

$$p(\psi, \varphi \mid y^t) = \sum_{i \in I} U_{t,i} I_{\omega_i}(\psi)\, p_{\Phi_i \mid Y_{1,i}^t}(\varphi \mid y^t) \Big/ \sum_{i \in I} U_{t,i} V_i, \tag{17}$$

где V_i — объем области ω_i.

Таким образом, в рассматриваемом случае отпадает необходимость вычисления интеграла (15).

Из формулы (17), в частности, следует

$$p(\psi \mid y^t) = \sum_{i \in I} U_{t,i} I_{\omega_i}(\psi) \Big/ \sum_{i \in I} U_{t,i} V_i, \tag{18}$$

$$p(\varphi \mid y^t) = \sum_{i \in I} U_{t,i} V_i\, p_{\Phi_i \mid Y_{1,i}^t}(\varphi \mid y^t) \Big/ \sum_{i \in I} U_{t,i} V_i. \tag{19}$$

Следствие 2. Пусть априорная ПВ компоненты Ψ имеет вид (16), а область ω_i $(i \in I)$ является прямоугольным параллелепипедом с геометрическим центром в точке C_i и параллельными осям координат ребрами с длинами $L_{i,1}, \ldots, L_{i,n_\psi}$.

Тогда оптимальные в среднеквадратическом смысле оценки m_t^ψ, m_t^φ параметров Ψ и Φ, а также соответствующие апостериорные ковариационные матрицы ошибок оценивания Γ_t^ψ, Γ_t^φ вычисляются по следующим формулам:

$$m_t^\psi = \sum_{i \in I} U_{t,i} C_i V_i \Big/ \sum_{i \in I} U_{t,i} V_i,$$

$$\Gamma_t^\psi = \sum_{i \in I} U_{t,i} [\gamma_i^\psi + (C_i - m_t^\psi)(C_i - m_t^\psi)^T] V_i \Big/ \sum_{i \in I} U_{t,i} V_i, \tag{20}$$

$$m_t^\varphi = \sum_{i \in I} U_{t,i} V_i m_{t,i}^\varphi \Big/ \sum_{i \in I} U_{t,i} V_i.$$

$$\Gamma_t^\varphi = \sum_{i\in I} U_{t,i} V_i [\Gamma^\varphi_{t,i} + (m^\varphi_{t,i} - m_t^\varphi)(m^\varphi_{t,i} - m_t^\varphi)^T] \Big/ \sum_{i\in I} U_{t,i} V_i,$$

где

(21)
$$m^\varphi_{t,i} = \int \varphi p_{\Phi_i|Y^t_{1,i}}(\varphi | y^t)\, d\varphi; \quad V_i = L_{i,1} \times \ldots \times L_{i,n_\psi};$$
$$\Gamma^\varphi_{t,i} = \int [\varphi - m^\varphi_{t,i}][\varphi - m^\varphi_{t,i}]^T p_{\Phi_i|Y^t_{1,i}}(\varphi | y_1^t)\, d\varphi;$$
$$\gamma_i^\psi = \mathrm{diag}\,\{L^2_{i,1}/12, \ldots, L^2_{i,n_\psi}/12\}.$$

Формулы (20), (21) могут быть получены путем непосредственного вычисления интегралов

$$m_t^\psi = \int \psi p(\psi | y^t)\, d\psi, \qquad m_t^\varphi = \int \varphi p(\varphi | y^t)\, d\varphi,$$
$$\Gamma_t^\psi = \int [\psi - m_t^\psi][\psi - m_t^\psi]^T p(\psi | y^t)\, d\psi,$$
$$\Gamma_t^\varphi = \int [\varphi - m_t^\varphi][\varphi - m_t^\varphi]^T p(\varphi | y^t)\, d\varphi$$

с использованием соотношений (18), (19).

3. Кусочно-линейное уравнение наблюдаемого процесса

Пусть наблюдаемый процесс имеет вид

(22)
$$Y_t = \sum_{i=0}^{n} I_{\Omega_i}(X)[b_{t,i} + B_{t,i} X + G_{t,i} \varepsilon_t],$$

где ε_t, $t=1, 2, \ldots$ — последовательность независимых нормированных гауссовских ошибок измерения с нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей; коэффициенты $b_{t,i}$, $B_{t,i}$, $G_{t,i}$ имеют соответственно размеры n_y, $n_y \times n_x$, $n_y \times n_y$, а совокупность попарно непересекающихся областей Ω_i, $i=\overline{0, n}$ удовлетворяет условию (4).

Обозначим

$$N_x\{m, \Gamma\} = [(2\pi)^n |\Gamma|]^{-0.5} \exp\{-0.5(x-m)^T \Gamma^{-1} (x-m)\},$$

где векторы x, m и положительно определенная матрица Γ имеют размеры n, n, $n \times n$ соответственно; $|\Gamma|$ — детерминант Γ.

Теорема 3. Пусть априорная ПВ параметра X кусочно-гауссовская:

(23)
$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} U_{0,i} I_{\Omega_i}(x) N_x\{m_{0,i}, \Gamma_{0,i}\} \Big/ \sum_{i=0}^{n} U_{0,i} R_{0,i},$$

где $R_{0,i} = \int_{\Omega_i} N_x\{m_{0,i}, \Gamma_{0,i}\}\, dx$, а $U_{0,i}$, $m_{0,i}$, $\Gamma_{0,i}$ $(i=\overline{0, n})$ — заданные параметры.

Тогда АПВ вероятности вектора X при известной реализации y^t случайной последовательности Y^t ($t=1, 2, \dots$) вида (11) также является кусочно-гауссовской:

$$(24) \qquad p(x \mid y^t) = \sum_{i=0}^{n} U_{t,i} I_{\Omega_i}(x) N_x\{m_{t,i}, \Gamma_{t,i}\} \Big/ \sum_{i=0}^{n} U_{t,i} R_{t,i},$$

где $R_{t,i} = \int\limits_{\Omega_i} N_x\{m_{t,i}, \Gamma_{t,i}\} dx$, а достаточные статистики $m_{t,i}$, $\Gamma_{t,i}$, $U_{t,i}$ удовлетворяют системе рекуррентных уравнений

$$m_{t,i} = m_{t-1,i} + K_{t,i}(y_t - b_{t,i} - B_{t,i} m_{t-1,i}),$$

$$(25) \qquad \Gamma_{t,i} = \Gamma_{t-1,i} - K_{t,i} B_{t,i} \Gamma_{t-1,i},$$

$$K_{t,i} = \Gamma_{t-1,i} B_{t,i}^T (W_{t,i} + B_{t,i} \Gamma_{t-1,i} B_{t,i}^T)^{-1}, \qquad W_{t,i} = G_{t,i} G_{t,i}^T,$$

$$(26) \qquad U_{t,i} = U_{t-1,i} N_{y_t}\{b_{t,i} + B_{t,i} m_{t-1,i} W_{t,i} + B_{t,i} \Gamma_{t-1,i} B_{t,i}^T\},$$

решаемых с начальными условиями $m_{0,i}$, $\Gamma_{0,i}$, $U_{0,i}$.

Доказательство теоремы приводится в приложении.

4. Кусочно-постоянное по одним и линейное по другим компонентам оцениваемого параметра уравнение наблюдаемого процесса

Пусть наблюдаемый процесс имеет вид

$$(27) \qquad Y_t = \sum_{i=0}^{n} I_{\omega_i}(\Psi) [b_{t,i} + B_{t,i} \Phi + G_{t,i} \varepsilon_t],$$

где ε_t, $t=1, 2, \dots$ — последовательность независимых нормированных гауссовских ошибок измерения с нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей, коэффициенты $b_{t,i}$, $B_{t,i}$, $G_{t,i}$ имеют размеры n_y, $n_y \times n_\varphi$, $n_y \times n_y$ соответственно, априорная плотность вероятности компоненты Ψ задается формулой (16), в которой относительно области ω_ψ (а также областей ω_i, $i=\overline{0, n}$) делаются допущения, принимаемые в теореме 2 и следствиях 1, 2. Кроме того, предположим, что

$$(28) \qquad p(\varphi \mid \psi) = \sum_{i=0}^{n} I_{\omega_i}(\psi) N_\varphi\{m_{0,i}^\varphi, \Gamma_{0,i}^\varphi\}.$$

Теорема 4. В принятых предположениях для $t=1, 2, \dots$

$$(29) \qquad p(\psi, \varphi \mid y^t) = \sum_{i \in I} U_{t,i} I_{\omega_i}(\psi) N_\varphi\{m_{t,i}^\varphi, \Gamma_{t,i}^\varphi\} \Big/ \sum_{i \in I} U_{t,i} V_i,$$

$$(30) \qquad p(\psi \mid y^t) = \sum_{i \in I} U_{t,i} I_{\omega_i}(\psi) \Big/ \sum_{i \in I} U_{t,i} V_i,$$

$$(31) \qquad p(\varphi \mid y^t) = \sum_{i \in I} U_{t,i} V_i N_\varphi\{m_{t,i}^\varphi, \Gamma_{t,i}^\varphi\} \Big/ \sum_{i \in I} U_{t,i} V_i,$$

где достаточные статистики $m_{t,i}^{\varphi}$, $\Gamma_{t,i}^{\varphi}$, $U_{t,i}$ удовлетворяют системе рекуррентных уравнений

$$m_{t,i}^{\varphi}=m_{t-1,i}^{\varphi}+K_{t,i}(y_t-b_{t,i}-B_{t,i}m_{t-1,i}^{\varphi}),$$

$$\Gamma_{t,i}^{\varphi}=\Gamma_{t-1,i}^{\varphi}-K_{t,i}B_{t,i}\Gamma_{t-1,i}^{\varphi}, \qquad W_{t,i}=G_{t,i}G_{t,i}^{T}, \tag{32}$$

$$K_{t,i}=\Gamma_{t-1,i}^{\varphi}B_{t,i}^{T}(W_{t,i}+B_{t,i}\Gamma_{t-1,i}^{\varphi}B_{t,i}^{T})^{-1},$$

$$U_{t,i}=U_{t-1,i}N_y\{b_{t,i}+B_{t,i}m_{t-1,i}^{\varphi}, W_{t,i}+B_{t,i}\Gamma_{t-1,i}^{\varphi}B_{t,i}^{T}\}, \tag{33}$$

решаемых с начальными условиями $m_{0,i}^{\varphi}$, $\Gamma_{0,i}^{\varphi}$ и $U_{0,i}=1$. При этом оптимальные в среднеквадратическом смысле оценки m_t^{ψ}, m_t^{φ} параметров Ψ, Φ, а также соответствующие ковариационные матрицы ошибок оценивания Γ_t^{ψ}, Γ_t^{φ} задаются формулами (20).

Доказательство теоремы приводится в приложении.

При отсутствии априорной информации в качестве модели априорной ПВ оцениваемого параметра в гауссовско-марковских задачах получила широкое распространение гауссовская ПВ с бесконечной ковариационной матрицей [6]. По аналогии рассмотрим здесь случай, когда в модели (28) матрицы $\Gamma_{0,i}^{\varphi}$, $i=\overline{0,n}$ — бесконечно большие. Обозначим

$$y_1^t=\begin{Vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_t \end{Vmatrix},\quad b_{1,i}^t=\begin{Vmatrix} b_{1,i} \\ \vdots \\ b_{t,i} \end{Vmatrix},\quad B_{1,i}^t=\begin{Vmatrix} B_{1,i} \\ \vdots \\ B_{t,i} \end{Vmatrix},\quad W_{1,i}^t=\begin{Vmatrix} W_{1,i} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & W_{t,i} \end{Vmatrix}. \tag{34}$$

Теорема 5. Пусть для произвольного $i\in I$ имеем $|W_{t,i}|\neq 0$ $(t=1, 2, \ldots)$, $\operatorname{rang} B_{1,i}^t=n_{\varphi}$ для любого $t\geqslant k$, где k — некоторое количество измерений, $\Gamma_{0,i}^{\varphi}=\gamma\Gamma$, где $\gamma>0$ — скалярный коэффициент; Γ — некоторая положительно определенная матрица.

Тогда при $\gamma\to\infty$ соотношения (20), (29)—(31) остаются в силе для $t\geqslant k$. При этом достаточные статистики $m_{t,i}^{\varphi}$, $\Gamma_{t,i}^{\varphi}$, $U_{t,i}$ впервые вычисляются при $t=k$ по формулам

$$\Gamma_{t,i}^{\varphi}=\left[\sum_{j=1}^{t}B_{j,i}W_{j,i}^{-1}B_{j,i}^{T}\right]^{-1}, \qquad m_{t,i}^{\varphi}=\Gamma_{t,i}^{\varphi}\sum_{j=1}^{t}B_{j,i}^{T}W_{j,i}^{-1}(y_j-b_{j,i}), \tag{35}$$

$$U_{t,i}=\prod_{j=1}^{t}N_0\{y_j-b_{j,i}, W_{j,i}\}/N_0\{m_{t,i}, \Gamma_{t,i}\}, \tag{36}$$

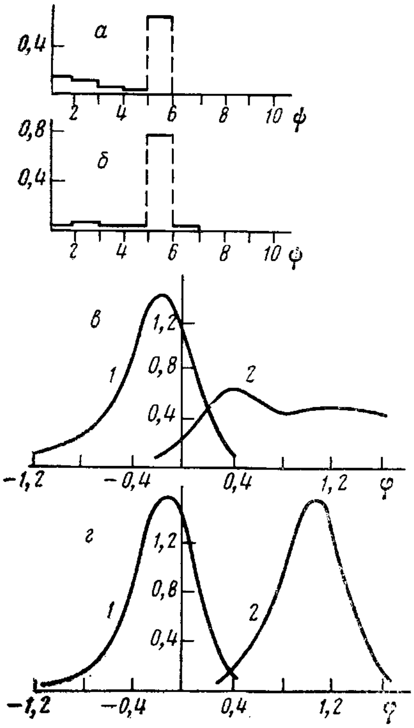
а для $t>k$ рассчитываются по-прежнему в силу рекуррентных уравнений (32) с начальными условиями $m_{k,i}^{\varphi}$, $\Gamma_{k,i}^{\varphi}$, $U_{k,i}$. (Здесь $N_0\{m, \Gamma\}=N_x\{m, \Gamma\}|_{x=0}$.)

5. Пример: оценивание скачкообразной константы

Пусть Ψ — случайный момент в непрерывном времени, наблюдаемый процесс $Y_t = Y(\tau_t)$, $t=1, 2, \ldots, T$ имеет вид

$$Y_t = \begin{cases} \Phi_1 + G\varepsilon_t & \text{при } \tau_t < \Psi, \\ \Phi_2 + G\varepsilon_t & \text{при } \tau_t \geqslant \Psi, \end{cases}$$

случайные параметры Ψ, Φ_1, Φ_2, ε_t, $t=1, 2, \ldots, T$ статистически независимы, ε_t, $t=1, 2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Момент скачка Ψ имеет равномерную на интервале наблюдения $\omega_\psi = [\tau_1, \tau_T]$ плотность вероятности, а значения Φ_1, Φ_2 константы до и после скачка распределены по гауссовскому закону с бесконечной дисперсией.



Воспользуемся принятыми ранее обозначениями и положим $\Phi = \|\Phi_1, \Phi_2\|^{\mathrm{T}}$, $r = T-1$, $\tau_0 = -\infty$, $\tau_{T+1} = +\infty$ и для $i = 0, 1, \ldots, T$

$$\omega_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad b_{t,i} = 0, \quad G_{t,i} = G,$$

$$B_{t,i} = \begin{cases} \|1, 0\| & \text{при } t \leqslant i, \\ \|0, 1\| & \text{при } t > i. \end{cases}$$

В этих обозначениях наблюдаемый процесс Y_t представляется в виде (27), и относительно параметров Ψ, Φ и Y^t выполняются условия теоремы 5. Таким образом, апостериорные плотности вероятности момента скачка Ψ и вектора Φ задаются формулами (29)—(31), в которых $V_i = \tau_{i+1} - \tau_i$, а к множеству I относятся номера $i=1, \ldots, T-1$. Оптимальные в среднеквадратическом смысле оценки m_T^ψ, m_T^φ параметров Ψ, Φ, а также соответствующие ковариационные матрицы ошибок оценивания Γ_T^ψ, Γ_T^φ вычисляются по формулам (20), причем параметры m^φ . $\Gamma^\varphi_{T,i}$, $U_{T,i}$, $(i=1, \overline{T-1})$ при $T \geqslant 2$ являются решением рекуррентных уравнений (32), (33) при $t=T$ с начальными условиями $m^\varphi_{2,i}, \Gamma^\varphi_{2,i}$, $U_{2,i}$, которые рассчитываются по формулам (35), (36) при $t=2$.

На рис., *а*, *б* соответственно для $T=6, 10$ представлены результаты расчетов АПВ момента скачка. На рис., *в*, *г* соответственно для $T=6, 10$ приведен расчетный вид АПВ значений константы до скачка (кривая 1) и после скачка (кривая 2). При моделировании принимались следующие значения параметров: $\tau_{t+1} - \tau_t = 1$ $(t=1, \ldots, T)$; $\Psi=5$; $\Phi_1=0$; $\Phi_2=1$; $G=0{,}5$.

6. Заключение

Полученные в статье модификации рекурсивного байесовского соотношения и найденные на их основе формулы для апостериорных характеристик оцениваемого параметра являются удобным инструментом для синтеза и анализа точного решения некоторых нелинейных задач оценивания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Воспользуемся методом математической индукции. С учетом (3), (5), (6) имеем

$$p(y_1|x)p(x)=\sum_{i=0}^{n}U_{0,i}I_{\Omega_i}(x)p^i(y_1|x)p^i(x)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}U_{0,i}I_{\Omega_i}(x)p_{Y_{1,i}|X}(y_1|x)p_{X_i}(x)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}U_{0,i}p_{Y_{1,i}}(y_1)p_{X_i|Y_{1,i}}(x|y_1).$$

Подставляя полученное тождество в числитель и знаменатель байесовского рекурсивного соотношения (2) и обозначая

$$U_{1,i}=U_{0,i}p_{Y_{1,i}}(y_1),\qquad R_{1,i}=\int\limits_{\Omega_i}p_{X_i|Y_{1,i}}(x|y_1)\,dx,$$

убеждаемся в справедливости формулы (7) при $t=1$.

Предполагая, что тождество (7) имеет место для некоторого произвольного $(t-1)$-го шага, с помощью формул (5)–(7) получаем

$$p(y_t|x)p(x|y^{t-1})=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}U_{t-1,i}I_{\Omega_i}(x)p_{Y_{t,i}|Y_{1,i}^{t-1},X_i}(y_t|y^{t-1},x)p_{X_i|Y_{1,i}^{t-1}}(x|y^{t-1})\Big/\sum_{i=0}^{n}U_{t-1,i}R_{t-1,i}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}U_{t-1,i}p_{Y_t|Y_{1,i}^{t-1}}(y_t|y^{t-1})I_{\Omega_i}(x)p_{X_i|Y_{1,i}^{t}}(x|y^t)\Big/\sum_{i=0}^{n}U_{t-1,i}R_{t-1,i}.$$

Подставляя полученное тождество в числитель и знаменатель соотношения (2) и прибегая к обозначениям (8), (9), убеждаемся в справедливости формулы (7) и для шага t. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Обозначим $X=\|\Psi^T,\ \Phi^T\|^T$, $x=\|\Psi^T,\ \varphi^T\|^T$ и для $i=0,\ n$ положим $\Omega_i=\{X\in E_{n_x}|\Psi\in\omega_i\}$, $n_x=n_\psi+n_\varphi$, $p^i(x)=p(\psi)\ p^i(\varphi)$, $p^i(y_t|x)=p^i(y_t|\varphi)$.

Принятые обозначение и очевидное тождество $\sum\limits_{i=0}^{n}\int\limits_{\Omega_i}p^i(x)\,dx=1$ позволяют записать формулы (11), (12) в виде

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}I_{\omega_i}(\psi)p^i(\varphi)p(\psi)=\sum_{i=0}^{n}I_{\Omega_i}(x)p^i(x)\Big/\sum_{i=0}^{n}\int\limits_{\Omega_i}p^i(x)\,dx,$$

$$p(y_t|y^{t-1},x)=\sum_{i=0}^{n} I_{\Omega_i}(x)p^i(y_t|x).$$

Для вспомогательных параметров X_i, $Y^t_{1,i}$ зададим плотности вероятности (6), положив

$$p_{\Psi_i}(\psi)=p(\psi),\quad p_{\Phi_i|\Psi_i}(\varphi|\psi)=p^i(\varphi)=p_{\Phi_i}(\varphi).$$

Поскольку выполняются все условия теоремы 1 (в рассматриваемом случае в формуле (5) для $p(x)$ следует положить $U_{0,i}=1$, $i=\overline{0,n}$), АПВ $p(x|y^t)$ имеет вид (7). При этом в рассматриваемом случае в силу независимости введенных вспомогательных параметров Ψ_i и Φ_i (а также Ψ_i и $Y_{t,i}$)

$$p_{X_i|Y^t_{1,i}}(x|y^t)=p(\psi)\,p_{\Phi_i|Y^t_{1,i}}(\varphi|y^t),$$

$$\int_{\Omega_i} p_{X_i|Y^t_{1,i}}(x|y^t)\,dx=\int_{\omega_i} p(\psi)\,d\psi.$$

С учетом этих равенств из (7) следует формула (14). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. В силу (22), (23) выполняются условия (5) теоремы 1, в которых для данного случая

$$p^i(x)=N_x\{m_{0,i},\Gamma_{0,i}\},\quad p^i(y_t|x)=N_{y_t}\{b_{t,i}+B_{t,i}x,W_{t,i}\}.$$

Рассмотрим вспомогательную последовательность

$$Y_{t,i}=b_{t,i}+B_{t,i}X_i+G_{t,i}\varepsilon_t,\ t=1,2,\dots,(i=\overline{0,n}),$$

и зададим для параметра X_i ПВ $p_{X_i}(x)=N_x\{m_{0,i},\Gamma_{0,i}\}$. При этом выполняются условия (6) и (см. [6])

$$\text{(П.1)}\quad \begin{aligned} &p_{Y_{t,i}|Y^{t-1}_{1,i}}(y_t|y^{t-1})=N_{y_t}\{b_{t,i}+B_{t,i}m_{t-1,i},\ W_{t,i}+B_{t,i}\Gamma_{t-1,i}B^T_{t,i}\},\\ &p_{X_i|Y^t_{1,i}}(x|y^t)=N_x\{m_{t,i},\Gamma_{t,i}\},\end{aligned}$$

где параметры $m_{t,i}$, $\Gamma_{t,i}$ удовлетворяют системе рекуррентных уравнений Калмана – Бьюси (25).

Поскольку в рассматриваемом случае имеют место условия теоремы 1, воспользуемся соотношениями (7)–(10), из которых с учетом (П.1) следуют уравнения (24) и (26). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. В силу (27), (28) выполняются условия (11), (12) теоремы 2, в которых для данного случая

$$p^i(\varphi)=N_\varphi\{\overset{\varphi}{m}_{0,i},\overset{\varphi}{\Gamma}_{0,i}\},\quad p^i(y_t|\varphi)=N_{y_t}\{b_{t,i}+B_{t,i}\Phi,W_{t,i}\}.$$

Рассмотрим последовательность $Y_{t,i}=b_{t,i}+B_{t,i}\Phi_i+G_{t,i}\varepsilon_t$, $t=1,2,\dots,(i=\overline{0,n})$ и для Φ_i зададим ПВ $p_{\Phi_i}(\varphi)=N_\varphi\{\overset{\varphi}{m}_{0,i},\overset{\varphi}{\Gamma}_{0,i}\}$. При этом справедливо условие (13) и

$$\text{(П.2)}\quad \begin{aligned} &p_{Y_{t,i}|Y^{t-1}_{1,i}}(y_t|y^{t-1})=N_{y_t}\{b_{t,i}+B_{t,i}m^\varphi_{t-1,i},W_{t,i}+B_{t,i}\Gamma^\varphi_{t-1,i}B^T_{t,i}\},\\ &p_{\Phi_i|Y^t_{1,i}}(\varphi|y^t)=N_\varphi\{m^\varphi_{t,i},\Gamma^\varphi_{t,i}\},\end{aligned}$$

где параметры $\overset{\varphi}{m}_{t,i}$, $\overset{\varphi}{\Gamma}_{t,i}$ удовлетворяют системе рекуррентных уравнений Калмана – Бьюси (32).

Поскольку в рассматриваемом случае имеют место условия, принимаемые в теореме 2 и при формулировке следствий 1, 2, параметры m_t^ψ, m_t^φ, Γ_t^ψ, Γ_t^φ действительно вычисляются по формулам (20), а из соотношений (9), (10), (14), (18), (19) приподстановке в них выражений (П.2) следуют утверждения (29)–(33). Теорема доказана.

Лемма. Пусть $U=N_y\{b+Bm,\ W+\gamma B\Gamma B^T\}$, где W и Γ – положительно определенные матрицы, $\operatorname{rang} B=r$, векторы y, b, m и матрицы B, W, Γ имеют размеры N, N, r, $N\times r$, $N\times N$, $r\times r$ соответственно. Тогда

$$\lim_{\gamma\to+\infty} U[(2\pi)^r|\Gamma|]^{0,5}=N_0\{y-b,W\}/N_0\{\hat{m},\hat{\Gamma}\}, \tag{П.3}$$

$$\hat{\Gamma}=[B^TW^{-1}B]^{-1},\ \hat{m}=\hat{\Gamma}B^TW^{-1}(y-b). \tag{П.4}$$

Доказательство леммы. Представим U в виде

$$U=[(2\pi)^N|W+\gamma B\Gamma B^T|]^{-0,5}\exp\{P\}, \tag{П.5}$$

$$P=-0{,}5(y-b-Bm)^T(W+\gamma B\Gamma B^T)^{-1}(y-b-Bm). \tag{П.6}$$

Применение известного матричного тождества $(A+BCB^T)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(C^{-1}+B^T\cdot A^{-1}B)^{-1}B^TA^{-1}$ позволяет найти предел

$$\lim_{\gamma\to+\infty}(W+\gamma B\Gamma B^T)^{-1}=W^{-1}-W^{-1}B(B^TW^{-1}B)^{-1}B^TW^{-1}. \tag{П.7}$$

Из (П.6) с учетом (П.7) можно получить

$$\lim_{\gamma\to+\infty}P=-(y-b)^TW^{-1}(y-b)/2+\hat{m}^T\hat{\Gamma}^{-1}\hat{m}/2, \tag{П.8}$$

где параметры $\hat{m}$, $\hat{\Gamma}$ вычисляются по формулам (П.4).

Обозначая $A=W^{-0,5}B\Gamma$, имеем

$$|W+\gamma B\Gamma B^T|=|W|\,|E+\gamma AA^T|. \tag{П.9}$$

Но $\operatorname{rang} AA^T=\operatorname{rang} A^TA=r$, и ненулевые собственные значения матриц AA^T и A^TA совпадают. Пусть M – ортогональная матрица, приводящая матрицу AA^T к диагональному виду: $MAA^TM^T=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_r,0,\dots,0\}$. Из (П.9) получаем

$$|W+\gamma B\Gamma B^T|=\gamma^r|W|(\lambda_1+1/\gamma)\dots(\lambda_r+1/\gamma),$$

откуда следует

$$\lim_{\gamma\to+\infty}|W+\gamma B\Gamma B^T|/\gamma^r=|W|\,|A^TA|=|\Gamma|\,|W|/|\hat{\Gamma}|. \tag{П.10}$$

Переход к пределу при $\gamma\to+\infty$ в формуле (П.5) с учетом (П.8), (П.10) приводит к соотношению (П.3). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5. Применяя при $t=k$ формулу (33) для объединенного вектора измерений $y_1{}^t$, с учетом обозначений (34) получаем выражение

$$U_{t,i}=N_{y_1^t}\{b_{1,i}^t+B_{1,i}^tm_{0,i},\quad W_{1,i}^t+\gamma B_{1,i}^t\Gamma(B_{1,i}^t)^T\},$$

с помощью которого в силу леммы находим

$$\lim_{\gamma\to+\infty}U_{k,i}[(2\pi\gamma)^n|\Gamma|]^{0,5}=N_0\{y_1{}^k-\overset{k}{b}_{1,i},\overset{k}{W}_{1,i}\}/N_0\{\overset{\varphi}{m}_{k,i},\overset{\varphi}{\Gamma}_{k,i}\}=$$

$$=\prod_{j=1}^{k}N_0\{y_j-b_{j,i},W_{j,i}\}/N_0\{\overset{\varphi}{m}_{k,i},\overset{\varphi}{\Gamma}_{k,i}\}.$$

Известно (см. [6]), что в принятых допущениях при $\gamma\to+\infty$ алгоритм Калмана–Бьюси (32) переходит в следующий гауссовско-марковский алгоритм. При $t=k$ по формулам (35) впервые вычисляются параметры $\overset{\varphi}{m}_{t,i}$, $\overset{\varphi}{\Gamma}_{t,i}$, которые образуют начальные условия для рекуррентных уравнений (32), решение которых дает $\overset{\varphi}{m}_{t,i}$, $\overset{\varphi}{\Gamma}_{t,i}$ при $t>k$. Умножая числители и знаменатели правых частей формул (20), (29)–(31) на $[(2\pi\gamma)^n|\Gamma|]^{0,5}$ и переходя к пределу при $\gamma\to+\infty$, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леондес К. Т.* Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах. М.: Мир, 1980.
2. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
3. *Di Masi G. B., Pratelli M., Runggaldier M. J.* An approximation with error bound for the nonlinear filtering problem. Itali: Ricerche Instituto per Recerche di Dinamica dei Sistemic di Bioingegneria, GNR-LADSEB, Internal report, 1985.
4. *Колесса А. Е.* Рекуррентные алгоритмы фильтрации для некоторых систем с нелинейностями кусочно-линейного типа//АиТ. 1986. № 4. С. 48–55.
5. *Колесса А. Е.* Некоторые прикладные вопросы рекуррентной кусочно-линейной фильтрации//АиТ. 1986. № 5. С. 61–69.
6. *Браммер К., Зиффлинг Г.* Фильтр Калмана – Бьюси. М.: Наука, 1982.

Поступила в редакцию
5.IV.1988

ACCURATE OPTIMAL FILTERING FORMULA IN A NONSTATIONARY PIECEWISE-LINEAR PARAMETER ESTIMATION PROBLEM

KOLESSA A. Ye.

A parameter is estimated which is piecewise-linear in the nonstationary equation of the process observed in discrete time with Gaussian uncorrelated measurement errors. Closed recurrent equations are found for sufficient statistics as are formulae for a posteriori characteristics of the parameter. The limit form of these characteristics and filtering equations are investigated with infinitely large a priori variances of the components of the vector parameter.